SOLUCIONES DEL SEGUNDO PARCIAL (17/12/2013)

1. Dada una aplicación lineal f : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de manera que : $f(1,1,1) = (1,-1), f(0,0,1) = (1,2). f(0,1,1) = (1,0)$ Se pide, obtener su matriz con respecto a las bases canónicas.

   Calculamos $f(1,0,0) = f(1,1,1) - f(0,1,1) = (1,-1) - (1,0) = (0,-1), f(0,1,0) = f(0,1,1) - f(0,0,1) = (1,0) - (1,2) = (0,-2), f(0,0,1) = (1,2)$

   $\mathcal{M}\left(f, B_3^C, B_2^C\right)$=col$(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

2. Calcular una base del subespacio *im(f)*. Y decidir, según su composición si es o no ¿??? *(la caracterización que nos da la imagen de una a.l.)*

   Sabemos que $Im(f) = \mathcal{L}\{col(\mathcal{M}(f, B_3^C, B_2^C))\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$. Como los dos últimos vectores son linealmente independientes es $B\left(Im(f)\right) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = B(\mathbb{R}^2)$. Por lo tanto se trata de un EPIMORFISMO

3. Calcular el subespacio de vectores que duplican su norma, conservando la dirección y sentido, al transformarse con el endomorfismo f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuya matriz con respecto a la base canónica es

$$M(f, B^C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2, Ker(A - 2I) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = y\right\}$$

4. Si la matriz de una aplicación lineal es $M\left(f, B_4^C, B_3^C\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, explicar razonadamente el significado del vector tercera columna de la misma $\overrightarrow{c_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{c_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

NOTA…………	

5. Si la matriz de una aplicación lineal es $M\left(f, B_4^C, B_3^C\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, deducir el valor de las dimensiones de los dos subespacios asociados a la misma

Reduciendo la matriz dada

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & -6 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{E_{21(-1)} \\ E_{31(2)}}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Vemos que su rango vale dos. Por lo tanto $dim\left(Im(f)\right) = rg\left(M\left(f, B_4^C, B_3^C\right)\right) = 2 \neq 3 = \dim(final)$. Se concluye que no es epimorfismo.

El rango de la matriz vale dos. Entonces $dim\left(Ker(f)\right) = 4 - dim\left(Im(f)\right) = 4 - 2 = 2$. Se concluye que no es monomorfismo.

6. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ cuyas ecuaciones respecto de una base ortonormal B^{ortn}son : $y_1 = \frac{1}{3}(x_1 - 2x_2 - 2x_3)$; $y_2 = \frac{1}{3}(-2x_1 + x_2 - 2x_3)$; $y_3 = \frac{1}{3}(-2x_1 - 2x_2 + x_3)$

Hallar la matriz de f respecto de B^{ortn}

$$M(f, B^{ortn}) = {}^1\!/_3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Explicar razonadamente si se trata de un endomorfismo ortogonal.

Como nos dan la matriz relativa a una base ortonormal, basta con comprobar la ortogonalidad de la matriz dada. Al ser base ortonormal los vectores-columna que la conforman, se trata de un endomorfismo ortogonal.

8. Demostrar que el endomorfismo f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $M(f, B^C) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, representa una simetría.

Como el dte. De la matriz ortogonal vale -1 se trata de una simetría.

9. Calcular el eje de simetría de la transformación anterior.

Su eje es la recta de ecuación $(1 + \sqrt{5})x + 2y = 0$

10. Hallar la matriz, respecto de la base canónica en $\mathbb{R}^2$, del Giro de centro 0 y amplitud $\frac{\pi}{6}$.

$$M\left(G_{\frac{\pi}{6}}, B^C\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

0,6 puntos vale cada cuestión contestada correctamente
No se permite el uso de aparatos,salvo el bolígrafo

NOTA…………

SOLUCIONES DEL SEGUNDO PARCIAL (17/12/2013)

1. Dada una aplicación lineal g : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de manera que : $g(-1,1,1) = (0,-1), g(0,0,1) = (1,2). g(0,1,1) = (1,2)$ Se pide, obtener su matriz con respecto a las bases canónicas.

Calculamos $f(1,0,0) = g(0,1,1) - g(-1,1,1) = (1,2) - (0,-1) = (1,3), g(0,1,0) = g(0,1,1) - g(0,0,1) = (1,2) - (1,2) = (0,0), g(0,0,1) = (1,2)$

$\mathcal{M}(f, B_3^C, B_2^C)=\mathrm{col}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Calcular una base del subespacio *im(g).* Y decidir, según su composición si es o no ¿??? *(la caracterización que nos da la imagen de una a.l.)*

Sabemos que $Im(g) = \mathcal{L}\{col(\mathcal{M}(g, B_3^C, B_2^C))\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$. Como los dos últimos vectores son linealmente independientes es $B(Im(g)) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = B(\mathbb{R}^2)$. Por lo tanto se trata de un EPIMORFISMO

3. Dado el endomorfismo f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuya matriz con respecto a la base canónica es

$M(f, B^C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

Decir si puede tener como espectro $\sigma(A) = \left\{\begin{matrix} 0 & 2 \\ m=2 & m=1 \end{matrix}\right\}$, explicando el porqué de la respuesta *(la explicación es lo que puntúa).*

No sería posible puesto que tr(A)=4 y la suma de los autovalores dados vale 2.

4. Calcular el subespacio de vectores que duplican su norma, conservando la dirección y sentido, al transformarse con el endomorfismo f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuya matriz con respecto a la base canónica es la del problema anterior.

$$\lambda = 2, Ker(A - 2I) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = y\right\}$$

5. Si la matriz de una aplicación lineal es $M(f, B_4^C, B_3^C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, explicar razonadamente el significado del vector segunda columna de la misma $\overrightarrow{c_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{c_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

NOTA…………

6. Si la matriz de una aplicación lineal es $M\left(f, B_4^C, B_3^C\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, deducir el valor de las dimensiones de los dos subespacios asociados a la misma

Reduciendo la matriz dada

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{E_{31(-1)} \\ E_{21(2)}}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Vemos que su rango vale dos. Por lo tanto $dim\left(Im(f)\right) = rg\left(M\left(f, B_4^C, B_3^C\right)\right) = 2 \neq 3 = \dim(final)$. Se concluye que no es epimorfismo.

El rango de la matriz vale dos. Entonces $dim\left(Ker(f)\right) = 4 - dim\left(Im(f)\right) = 4 - 2 = 2$. Se concluye que no es monomorfismo.

7. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ cuyas ecuaciones respecto de una base ortonormal B^{ortn} son : $y_1 = {}^1/_{\sqrt{2}}\,(x_1 + x_3)$; $y_2 = {}^1/_{\sqrt{2}}\,(-x_1 + x_3)$; $y_3 = x_2$

   Hallar la matriz de f respecto de B^{ortn}

$$M(f, B^{ortn}) = \begin{pmatrix} {}^1/_{\sqrt{2}} & 0 & {}^1/_{\sqrt{2}} \\ -{}^1/_{\sqrt{2}} & 0 & {}^1/_{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Explicar razonadamente si se trata de un endomorfismo ortogonal.

   Como nos dan la matriz relativa a una base ortonormal, basta con comprobar la ortogonalidad de la matriz dada. Al ser base ortonormal los vectores-columna que la conforman, se trata de un endomorfismo ortogonal.

9. Demostrar que el endomorfismo f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $M(f, B^C) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, representa un giro.

   Como el dte. De la matriz ortogonal vale 1 se trata de un giro.

10. Calcular el ángulo de giro de la transformación anterior.

   ángulo de giro= $ArcCos(\frac{tr(A)}{2})$= $ArcCos(\frac{1}{\sqrt{5}})$

0,6 puntos vale cada cuestión contestada correctamente
No se permite el uso de aparatos,salvo el bolígrafo

SEGUNDO PARCIAL segunda parte (17/12/2013)

1. Sea f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, una aplicación lineal de manera que es $\mathcal{M}(f, B_3^C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, se pide Calcular sus autovalores y diagonalizarla normal y ortogonalmente si fuera posible-. Especificar, en este caso las bases de diagonalización y las ecuaciones del endomorfismo referidas a dichas bases. *(uno de los autovalores vale 1 y el dte-1)*

SOLUCIÓN: (i) El subespacio-núcleo de la aplicación se calcula resolviendo el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que admite solución única y que por tanto es Ker(f)=$\{\vec{0}\}$

(ii) Las columnas de la matriz son un sistema de generadores del subespacio imagen. Como el det. De la matriz es no nulo, serán los tres vectores-columna linealmente independientes, por lo tanto es Im(f)= $\mathbb{R}^3$

(iii) Es monomorfismo ya que Ker(f)=$\{\vec{0}\}$, también es epimorfismo pues Im(f)= $\mathbb{R}^3$.

(iv) El polinomio característico asociado es $P_3(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 1$. Con TREs raices $\lambda = 1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2}$, de multiplicidad uno.

Por lo que la matriz es diagonalizable y también ortogonalmente, por ser simétrica.

Calculemos las bases de diagonalización

1. $\lambda = 1 - \sqrt{2}$, $Ker(A - (1 - \sqrt{2})I) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x + z = 0 \\ -y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}\right\}$.

   Entonces una base de este subespacio –recta será:

$$B\left(Ker(A - (1 - \sqrt{2})I)\right) = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, B^{ORTN}\left(Ker(A - (1 - \sqrt{2})I)\right) = \left\{\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\}$$

2. $\lambda = 1$, $Ker(A - I) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} =$

   $= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}\right\}$ Entonces una base de este subespacio –recta será:

$$B(Ker(A - I)) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, B^{ORTN}(Ker(A - I)) = \left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\}$$

NOTA………..

3. $\lambda = 1+\sqrt{2}$, $Ker(A-(1+\sqrt{2})I) = \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0\\ 1 & -\sqrt{2} & -1\\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x+z=0\\ y+\sqrt{2}z=0 \end{cases} \right\}.$

Entonces una base de este subespacio –recta será:

$$B\left(Ker(A-(1+\sqrt{2})I)\right) = \left\{ \begin{pmatrix} -1\\ -\sqrt{2}\\ 1 \end{pmatrix} \right\}, B^{ORTN}\left(Ker(A-(1+\sqrt{2})I)\right) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}\\ \frac{-\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo que las bases de diagonalización son

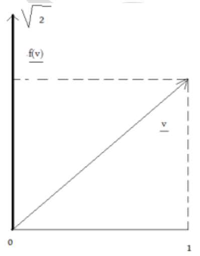
$$B_{diag} = \left\{ \begin{pmatrix} -1\\ \sqrt{2}\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\ -\sqrt{2}\\ 1 \end{pmatrix} \right\} B^{ORTN} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}\\ \frac{-\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Las ecuaciones del endomorfismo referidas a dichas base son

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{pmatrix}_{B_{diag}} = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}_{B_{diag}}$$

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{pmatrix}_{B^{ORTN}} = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}_{B^{ORTN}}$$

2. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una aplicación ortogonal de manera que $f(0,\sqrt{2}) = (-1,1)$. Se pide plantear las ecuaciones de f referidas a la base canónica si geométricamente planteamos la transformación de un vector en el otro: a) mediante un giro centrado en el origen y b) mediante una simetría con respecto a un eje que pasa por el origen de coordenadas.



SOLUCIÓN: a) El ángulo que forman ambos es de $\widehat{(0,\sqrt{2}) = (-1,1)} = \frac{\pi}{4}$. Por lo que

NOTA…………	

$$M(f,B^C)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$$

b) Ahora hemos de calcular las ecuaciones del eje de simetría que coincide con la bisectriz interior a las rectas que soportan a los vectores respectivos. Dichas rectas son $r_{(-1,1)}\equiv y=-x, r_{(0,\sqrt{2})}\equiv x=0$. Las bisectrices entre ambas tienen las ecuaciones $\frac{x+y}{\sqrt{2}}=\pm\frac{x}{1}$. La que buscamos es, de las dos dadas, la que tiene ordenada positiva correspondiente a la abscisa $x=-1$. Sustituyendo este valor en la ecuación de las bisectrices, obtenemos que la interior es la de ecuación $\left(1+\sqrt{2}\right)x+y=0$. Con esto, la matriz de la simetría es

$$M(f,B^C)=\frac{1}{2\left(2+\sqrt{2}\right)}\begin{pmatrix}-2\left(1+\sqrt{2}\right) & -2\left(1+\sqrt{2}\right)\\ -2\left(1+\sqrt{2}\right) & 2\left(1+\sqrt{2}\right)\end{pmatrix}$$

NOTA…………

SEGUNDO PARCIAL segunda parte (17/12/2013)

3. Sea f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, una aplicación lineal de manera que es $\mathcal{M}(f, B_3^C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, se pide (a) Dada la base $B^* = \left\{ \vec{s_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{s_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{s_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, **calcular** $\mathcal{M}(f, B^*)$ (b) Calcular sus autovalores y una base de diagonalización . *(uno de los autovalores vale 1 y el dte-1)*

SOLUCIÓN: (a) $\mathcal{M}(f, B^*) = \mathrm{C}(B_3^C, B^*)\, \mathcal{M}(f, B_3^C) \mathrm{C}(B^*, B_3^C)$. Ahora calculamos

$$\mathrm{C}(B^*, B_3^C) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \right\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C}(B_3^C, B^*) = \mathrm{C}^{-1}(B^*, B_3^C) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{E_{31}(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \underset{E_{32}(1), E_1(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

$$\underset{E_2(1/2), E_3(1/2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{array} \right) \Bigg\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{M}(f, B^*) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) El polinomio característico asociado es $P_3(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 1$. Con TREs raices $\lambda = 1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2}$, de multiplicidad uno.

Por lo que la matriz es diagonalizable y también ortogonalmente, por ser simétrica.

Calculemos las bases de diagonalización

4. $\lambda = 1 - \sqrt{2}, Ker(A - (1 - \sqrt{2})I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{c} x + z = 0 \\ -y + \sqrt{2}z = 0 \end{array} \right. \right\}.$

Entonces una base de este subespacio –recta será:

$$B\left(Ker(A - (1 - \sqrt{2})I)\right) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

5. $\lambda = 1, Ker(A - I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ x = z \end{array} \right. \right\}$ Entonces una base de este subespacio –recta será:

$$B\big(Ker(A-I)\big)=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

6. $\lambda=1+\sqrt{2}, Ker\big(A-(1+\sqrt{2})I\big)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}-\sqrt{2}&1&0\\1&-\sqrt{2}&-1\\0&-1&-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:\begin{cases}x+z=0\\y+\sqrt{2}z=0\end{cases}\right\}.$

Entonces una base de este subespacio –recta será:

$$B\left(Ker\left(A-\left(1+\sqrt{2}\right)I\right)\right)=\left\{\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right\}$$

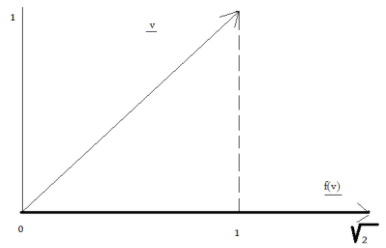
Por lo que una base de diagonalización es

$$B_{diag}=\left\{\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right\}$$

La ecuación del endomorfismo referida a dicha base es

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}_{B_{diag}}=\begin{bmatrix}1-\sqrt{2}&0&0\\0&1&0\\0&0&1+\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{B_{diag}}$$

1. Sea f: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, una aplicación ortogonal de manera que $f(-1{,}1)=(-\sqrt{2},0)$. Se pide plantear las ecuaciones de f referidas a la base canónica si geométricamente planteamos la transformación de un vector en el otro: a) mediante un giro centrado en el origen y b) mediante una simetría con respecto a un eje que pasa por el origen de coordenadas.



SOLUCIÓN: a) El ángulo que forman ambos es de $\widehat{(-1{,}1)(-\sqrt{2},0)}=\frac{\pi}{4}$. Por lo que

$$M(f,B^C)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&-\sin\frac{\pi}{4}\\\sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$$

b) Ahora hemos de calcular las ecuaciones del eje de simetría que coincide con la bisectriz interior a las rectas que soportan a los vectores respectivos. Dichas rectas son $r_{(-1,1)}\equiv y=-x, r_{(-\sqrt{2},0)}\equiv y=0$. Las bisectrices entre ambas tienen las ecuaciones $\frac{x+y}{\sqrt{2}}=\pm\frac{y}{1}$. La que buscamos es, de las dos dadas, la que tiene ordenada positiva correspondiente a la abscisa $x=-1$. Sustituyendo este valor en la ecuación de las bisectrices, obtenemos que la interior es la de ecuación $x+y\big(1+\sqrt{2}\big)=0$. Con esto, la matriz de la simetría es

$$M(f,B^C)=\frac{1}{2\big(2+\sqrt{2}\big)}\begin{pmatrix}2\big(1+\sqrt{2}\big)&2\big(1+\sqrt{2}\big)\\2\big(1+\sqrt{2}\big)&-2\big(1+\sqrt{2}\big)\end{pmatrix}$$

SOLUCIONES DEL SEGUNDO PARCIAL (017/12/2013)

1. Si la matriz de una aplicación lineal es $M\left(f,B_5^C,B_3^C\right)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, explicar razonadamente el significado del vector cuarta columna de la misma $\overrightarrow{c_4}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{c_4}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

1. Dada una aplicación lineal g : $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ de manera que : $g(-1,1)=(1,0,0,0), g(0,1)=(1,-1,2,0)$. Se pide, obtener su matriz con respecto a las bases canónicas.

Calculamos $g(1,0)=g(0,1)-\ g(-1,1)=(1,-1,2,0)-(1,0,0,0)=(0,-1,2,0)$

$$\mathcal{M}\left(g,B_2^C,B_4^C\right)=\mathrm{col}(g(1,0),g(0,1))=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\\ 2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

2. Calcular una base del subespacio *Ker(g).*

$$Ker(g)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\\ 2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\{\vec{0}\}$$

3. Calcular el polinomio característico del endomorfismo f: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, cuya matriz con respecto a la base canónica es *(su determinante vale -98)*

$$M(f,B^C)=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ -2 & 6 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$P_3(\lambda)=-\lambda^3+12\lambda^2-21\lambda-98$$

4. Dado el endomorfismo f: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, cuya matriz con respecto a la base canónica es

$$M(f,B^C)=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ -2 & 6 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

,Decir si puede tener como espectro $\sigma(A)=\begin{Bmatrix}7 & -2\\ m=2 & m=1\end{Bmatrix}$, explicando el porqué de la respuesta *(la explicación es lo que puntúa).*

Si sería posible puesto que tr(A)=12 y la suma de los autovalores dados vale 12. También el determinante coincide con el producto de los autovalores.

5. Si la matriz de un endomorfismo es

$$M(f,B^C)=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ -2 & 6 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

explicar razonadamente si se trata de un epimorfismo *(sobre).*

Vemos que el rango de la matriz vale tres. Por lo tanto $dim\big(Im(f)\big) = rg\big(M(f,B^C)\big) = 3 = \dim(final)$. Se concluye que es epimorfismo.

6. Si la matriz de un endomorfismo es

$$M(f,B^C) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

explicar razonadamente si se trata de un un monomorfismo (*inyectivo*).

Ahora $dim\big(Ker(f)\big) = 3 - rg\big(M(f,B^C)\big) = 0$. Se concluye que es monomorfismo.

7. Si la matriz de un endomorfismo es $M(g,B^C) = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$, explicar razonadamente si se trata de un endomorfismo ortogonal.

Como nos dan la matriz relativa a la base canónica, que es ortonormal, basta con comprobar la ortogonalidad de la matriz dada. Al ser base ortonormal los vectores-columna que la conforman, se trata de un endomorfismo ortogonal.

8. Demostrar que el endomorfismo ***s*** de matriz$M(s,B^C) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix}$, representa una simetría.

Como el dte de la matriz ortogonal vale -1 se trata de una simetría.

9. Calcular el eje de simetría de la transformación anterior.

Su eje es la recta de ecuación $\big(5+\sqrt{5}\big)x - 2\sqrt{5}y = 0$

10. Dada f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $M(f,B^C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ explicar razonadamente si se trata de un giro o de una simetría.

La matriz dada es ortogonal y como su determinante vale 1, se trata de un giro.

ÁLGEBRA LINEAL (1S1M-b) CURSO 2013/2014

NOMBRE:

NOTA…………	

SOLUCIONES DEL SEGUNDO PARCIAL (17/12/2013)

1. Si la matriz de una aplicación lineal es $M\left(f, B_5^C, B_3^C\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, explicar razonadamente el significado del vector tercera columna de la misma $\overrightarrow{c_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{c_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Dada una aplicación lineal g : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ de manera que : $g(1,-1) = (1,0,0,0), g(0,1) = (1,-1,2,0)$. Se pide, obtener su matriz con respecto a las bases canónicas.

Calculamos $g(1,0) = g(1,-1) + g(0,1) = (1,0,0,0) + (1,-1,2,0) = (2,-1,2,0)$

$$\mathcal{M}\left(g, B_2^C, B_4^C\right) = \text{col}(g(1,0), g(0,1)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calcular una base del subespacio *im(g)*. Y decidir, según su composición si es o no ¿??? *(la caracterización que nos da la imagen de una a.l.)*

Sabemos que $Im(g) = \mathcal{L}\{col(\mathcal{M}(g, B_2^C, B_4^C))\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Como los dos vectores son linealmente independientes es $B\left(Im(g)\right) = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \neq B(\mathbb{R}^4)$. Por lo tanto no es EPIMORFISMO

4. Calcular el polinomio característico del endomorfismo f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuya matriz con respecto a la base canónica es *(su determinante vale 20)*

$$M(f, B^C) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_3(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$$

5. Dado el endomorfismo f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuya matriz con respecto a la base canónica es

$$M(f, B^C) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

,Decir si puede tener como espectro $\sigma(A) = \left\{\begin{matrix} 5 & 2 \\ m = 2 & m = 1 \end{matrix}\right\}$, explicando el porqué de la respuesta *(la explicación es lo que puntúa).*

0,6 puntos vale cada cuestión contestada correctamente

No se permite el uso de aparatos,salvo el bolígrafo

NOTA…………	

No sería posible puesto que tr(A)=9 y la suma de los autovalores dados vale 12

6. Si la matriz de un endomorfismo es

$$M(f,B^C)=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$$

explicar razonadamente si se trata de un epimorfismo *(sobre).*

Vemos que el rango de la matriz vale tres. Por lo tanto $dim\big(Im(f)\big)=rg\big(M(f,B^C)\big)=3=\dim(final)$. Se concluye que es epimorfismo.

7. Si la matriz de un endomorfismo es

$$M(f,B^C)=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$$

explicar razonadamente si se trata de un monomorfismo (*inyectivo*).

Ahora $dim\big(Ker(f)\big)=3-rg\big(M(f,B^C)\big)=0$. Se concluye que es monomorfismo.

8. Si la matriz de un endomorfismo es $M(g,B^C)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{-2\sqrt{5}}{5}\\\frac{2\sqrt{5}}{5}&\frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$, explicar razonadamente si se trata de un endomorfismo ortogonal.

Como nos dan la matriz relativa a la base canónica, que es ortonormal, basta con comprobar la ortogonalidad de la matriz dada. Al ser base ortonormal los vectores-columna que la conforman, se trata de un endomorfismo ortogonal.

9. Demostrar que el endomorfismo ***s*** de matriz$M(s,B^C)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}\sqrt{5}&-2\sqrt{5}\\2\sqrt{5}&\sqrt{5}\end{pmatrix}$, representa un giro.

Como el dte de la matriz ortogonal vale 1 se trata de un giro.

10. Calcular el ángulo de giro. de la transformación anterior.

ángulo de giro= $ArcCos(\frac{tr(A)}{2})=$ $ArcCos(\frac{1}{\sqrt{5}})$

SEGUNDO PARCIAL segunda parte (17/12/2013)

1. Sea f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, una aplicación lineal de manera que es

$$\mathcal{M}(f, B_3^C) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$ se pide Calcular sus autovalores y diagonalizarla ortogonalmente si fuera posible-. Especificar, en este caso la base de diagonalización ortogonal y las ecuaciones del endomorfismo referidas a dicha base. *(uno de los autovalores vale 7 y el dte-98)*

SOLUCIÓN: (i)

El polinomio característico asociado es

$$P_3(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98$$

. Con dos raices $\lambda = -2, 7$ de multiplicidades uno y dos, respectivamente.
Por lo que la matriz es diagonalizable y también ortogonalmente, por ser simétrica.
Calculemos las bases de diagonalización

1. $\lambda = -2, Ker(A + 2I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x - 4y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \right\}.$

Entonces una base de este subespacio –recta será:

$$B(Ker(A + 2I)) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, B^{ORTN}(Ker(A + 2I)) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

2. $\lambda = 7, Ker(A - 7I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \{2x + y - 2z = 0\} \right\}$ Entonces una base de este subespacio –plano será:

$B(Ker(A - 7I)) = \left\{ \vec{w}_{1,} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, Y una base ortonormal de este subespacio será:

GRAM-SCHMIDT $\vec{o}_1 = \vec{w}_1, \vec{o}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\langle \vec{w}_2, \vec{o}_1 \rangle}{\|\vec{o}_1\|^2} \vec{o}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix},$

$\|\vec{o}_1\|^2 = 2, \|\vec{o}_2\|^2 = \frac{9}{2}$

$$B^{ortn}(Ker(A - I)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/6 \\ -2\sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2}/6 \end{pmatrix} \right\}$$

NOTA…………	

Por lo que las bases de diagonalización son

$$B_{diag}=\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}B^{ORTN}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{-2}{3}\\ \frac{-1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sqrt{2}/6\\-2\sqrt{2}/3\\-\sqrt{2}/6\end{pmatrix}\right\}$$

Las ecuaciones del endomorfismo referidas a dichas base son

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}_{B_{diag}}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&7&0\\0&0&7\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{B_{diag}}$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}_{B^{ORTN}}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&7&0\\0&0&7\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{B^{ORTN}}$$

SEGUNDO PARCIAL segunda parte (17/12/2013)

1. Sea f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, una aplicación lineal de manera que es

$$M(f,B^C) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$ se pide Calcular sus autovalores y diagonalizarla ortogonalmente si fuera posible-. Especificar, en este caso la base de diagonalización ortogonal y las ecuaciones del endomorfismo referidas a dicha base. *(uno de los autovalores vale 2 y el dte .20)*

SOLUCIÓN:

El polinomio característico asociado es

$$P_3(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$$

. Con $\sigma(A) = \left\{ \begin{matrix} 5 & 2 \\ m=1 & m=2 \end{matrix} \right\}$. Por lo que la matriz es diagonalizable y también ortogonalmente, por ser simétrica. Calculemos las bases de diagonalización

1. $\lambda = 2, Ker(A-2I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \{x+y+z=0 \right\}$.

–plano será:

$B\big(Ker(A-2I)\big) = \left\{ \vec{w}_{1,} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, Y una base ortonormal de este subespacio será:

GRAM-SCHMIDT

$$\vec{o}_1 = \vec{w}_{1,}, \vec{o}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\langle \vec{w}_2, \vec{o}_1 \rangle}{\|\vec{o}_1\|^2} \vec{o}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \|\vec{o}_1\|^2 = 2, \ \|\vec{o}_2\|^2 = \frac{3}{2}$$

$$B^{ortn}\big(Ker(A-2I)\big) = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}/4 \\ \sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{6}/2 \end{pmatrix} \right\}$$

2. $\lambda = 5, Ker(A-5I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\{ \begin{matrix} x+y-2z=0 \\ -y+z=0 \end{matrix} \right. \right\}$ Entonces una base de este subespacio –recta será:

$$B\big(Ker(A-5I)\big)=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\},\ B^{ORTN}\big(Ker(A-5I)\big)=\left\{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}\right\}$$

Por lo que las bases de diagonalización son

$$B_{diag}=\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}B^{ORTN}=\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sqrt{6}/4\\ \sqrt{6}/4\\ -\sqrt{6}/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}\right\}$$

Las ecuaciones del endomorfismo referidas a dichas base son

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}_{B_{diag}}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{B_{diag}}$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}_{B^{ORTN}}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{B^{ORTN}}$$